Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Algunas funciones sobre hiperespacios de continuos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

LAURA MONSERRAT ROSAS ANSASTIGA

ASESORES:

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

DR. DAVID MAYA ESCUDERO

TOLUCA, MÉXICO 2024

Índice general

Capítulo 1

Hiperespacios

1.1. Notación básica

Los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ denotan el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales respectivamente. Sea $D \subset \mathbb{R}$ acotado. Denotamos por $\mathrm{Inf}(D)$, el ínfimo del conjunto D.
Sean Z un espacio topológico y $A \subset Z$. Los siguientes símbolos $\mathrm{Cl_Z(A)}$ y $\mathrm{Int_Z(A)}$ denotan la cerradura y el interior del conjunto A en Z. En el caso de que no haya confución en el espacio base, utilizaremos los símbolos Cl(A) y Int(A).

Definición 1.1. *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado.*

Definición 1.2. *Sea X un espacio métrico. Decimos que un subespacio de X es un subcontinuo si es compacto y conexo con la topología heredada.*

Definición 1.3. *Decimos que un continuo X es unicoherente si para cualesquiera par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexa.*

Definición 1.4. *Un continuo es hereditariamente unicoherente si la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es conexa.*

Teorema 1.5. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subcontinuos de X tal que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha \neq \emptyset$. Entonces $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$ es un subcontinuo de X.*

Demostración.

Claramente $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$ es un cerrado no vacío. Para probar la conexidad, supongamos lo contrario. Entonces existen dos cerrados en X ajenos y no vacíos M y L tales que

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha = M \cup L.$$

Dado que X es normal, existen dos abiertos en X ajenos U y V tales que $M \subset U$ y $L \subset V$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha \subset U \cup V.$$

Así,

$$X \setminus (U \cup V) \subset X \setminus (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X \setminus K_\alpha.$$

Como $X \setminus (U \cup V)$ es cerrado y compacto en X, existe $K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n}$ tales que

$$X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus K_{\alpha_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}.$$

Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \subset U \cup V.$$

Por otro lado,

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

y X es hereditariamente unicoherente, $\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}$ es un conexo.
De donde

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \subset U$$

o

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \subset V.$$

Usando que

$$M \cup L \subset \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}\,,$$

y también

$$M \cup L \subset U \text{ o } M \cup L \subset V,$$

en cualquiera de los casos se tiene una contradicción.

Por lo que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$ es un conexo. Por lo tanto

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha \in C(X).$$

■

Definición 1.6. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es localmente conexo si para todo $x \in X$ y para todo abierto U en X tal que $x \in U$, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$.*

Lema 1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(b_n)_n$ es una sucesión en X tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene $d(x, b_n) < \frac{1}{n}$, entonces la sucesión $(b_n)_n$ converge a x.*

Demostración.

Sea $\eta > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \eta$. Sea $n \geq N$. Entonces

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \eta \quad \text{y} \quad d(x, b_n) < \eta.$$

Por lo tanto $(b_n)_n$ converge a x. ■

Definición 1.8. *Sean X un espacio métrico con métrica d, $x \in X$ y $r > 0$. Definimos la bola de radio r con centro en x como*

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Lema 1.9. *Consideremos al intervalo* $[0,\infty)$ *con la topológia usual del conjunto de los números reales. Si* A *es un subconjunto no vacío de* $[0,\infty)$*, entonces* $\inf(\mathrm{A}) \in \mathrm{Cl}_{[0,\infty)}(\mathrm{A})$.

Demostración.

Consideremos $\alpha = \inf(\mathrm{A})$. Sea $\epsilon > 0$. Demostraremos que $B_\epsilon(\alpha) \cap A \neq \emptyset$. Ahora, como

$$\alpha < \alpha + \epsilon \text{ y } \alpha = \inf(\mathrm{A}),$$

existe $a \in A$ tal que $\alpha \leq a < \alpha + \epsilon$.
Así $a \in A \cap B_\epsilon(\alpha)$. Concluimos que

$$A \cap B_\epsilon(\alpha) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\alpha \in \mathrm{Cl}_{[0,\infty)}(\mathrm{A})$. ■

Teorema 1.10. *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $p \in X$*. Entonces la función* $f : X \to [0,\infty)$ *definida como* $f(x) = d(x,p)$ *es continua.*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$. Sean $x, y \in X$ tales que $d(x,y) < \epsilon$. Demostraremos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos:

$$d(p,x) \leq d(p,y) + d(y,x) \text{ y}$$

$$d(p,y) \leq d(p,x) + d(x,y).$$

Entonces

$$d(p,x) - d(p,y) \leq d(y,x) < \epsilon \text{ y}$$

$$d(p,x) - d(p,y) \leq d(y,x) < \epsilon.$$

Concluimos que

$$|d(p,x) - d(p,y)| = |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Por lo que,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Por lo tanto f es continua . ■

Lema 1.11. *Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ compacto y $p \in X$. Entonces existe $a \in A$ tal que*

$$d(p,a) = \inf\{d(p,x) : x \in A\}.$$

Demostración.

Consideremos la función $f : X \to [0,\infty)$ definida por $f(x) = d(p,x)$. Por el Lema 1.10, f es continua. Como A es compacto en X, $f(A)$ es compacto en $[0,\infty)$.
Así, dado que $f(A)$ es cerrado y acotado, por el Lema 1.9,

$$\inf(f(A)) \in f(A).$$

Entonces existe $a \in A$ tal que

$$f(a) = \inf(f(A)).$$

Así

$$d(p,a) = \inf\{d(p,x) : x \in A\} = \inf(f(A))$$

. ■

Definición 1.12. *Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ no vacío y $\epsilon > 0$. Definimos la nube de A de radio ϵ como el conjunto:*

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \epsilon\}.$$

Lema 1.13. *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$ compacto. Si U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \subset N(A,r) \subset U$.*

Demostración.

Sea d la métrica para X. Supongamos que $U \neq X$. Sea

$$\epsilon = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in X \setminus U\}.$$

Probaremos que $\epsilon > 0$. Supongamos que $\epsilon = 0$. Entonces existen dos sucesiones $(x_n)_n \subset A$ y $(y_n)_n \subset X \setminus U$ tales que $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\}$ converge a 0.

Como A es compacto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $(x_n)_n$ converge a un x para algún $x \in A$. Ahora veamos que $x \in \text{Cl}((y_n)_n)$. Sea $\delta > 0$.

Vamos a probar que $B_\delta(x) \cap (y_n)_n \neq \emptyset$. Dado que $d(x_n, y_n) \to 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{\delta}{2}$ para toda $n \geq N_1$. Como $x_n \to x$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\delta}{2}$ para toda $n \geq N_2$.
Sea $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Usando la desigualdad del triangulo,

$$d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Por lo que $d(x, y_n) < \delta$. Así

$$y_n \in B_\delta(x) \cap (y_n)_n \text{ y } x \in \text{Cl}((y_n)_n).$$

Entonces

$$x \in \text{Cl}((y_n)_n) \subset \text{Cl}(X \setminus U) = X \setminus U.$$

Concluimos que $x \in X \setminus U$, una contradición. Por lo que $\epsilon > 0$. Finalmente, demostraremos que $N(\epsilon, A) \subset U$. Sea $x \in N(\epsilon, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$. Supongamos que $x \notin U$. Así $x \in X \setminus U$. Dado que $a \in A$ y $x \in X \setminus U$, $\epsilon \leq d(x, a)$. Entonces

$$d(x, a) < \epsilon \leq d(x, a),$$

lo cual es una contradicción. De donde $x \in U$.
De lo anterior $N(\epsilon, A) \subset U$.

■

Teorema 1.14. *Sea $(X_i)_i$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Si U es subconjunto abierto de X_1 tal que $U \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \supset X_i$ para toda $i \geq N$.*

Demostración.

Supongamos lo contrario. Por cada $N \in \mathbb{N}$, existe $i_N \geq N$ tal que $X_{i_N} \not\subset U$. Por cada $N \in \mathbb{N}$, escogemos $x_{i_N} \in X_{i_N} \setminus U$.

Dado que X_1 es compacto, existen $p \in X_1$ y una subsucesión $(x_{i_{N_l}})_l$ de la sucesión $(x_{i_N})_N$ convergente a p. Dado que

$$(x_{i_{N_l}})_l \subset X_1 \setminus U \quad \text{y} \quad X_1 \setminus U$$

es cerrado, $p \in X_1 \setminus U$.

Necesitamos probar la siguiente

Afirmación. Para toda $k \in \mathbb{N}$, $p \in X_k$.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $i_{N_l} \geq k$. Entonces

$$x_{i_{N_l}} \in X_{i_{N_l}} \subset X_k.$$

Así $x_{i_{N_l}} \in X_k$. De donde

$$(x_{i_{N_l}})_{i_{N_l} \geq k} \subset X_k.$$

Por lo que $p \in X_k$. Esto prueba la afirmación.

De la Afirmación,

$$p \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \text{ y } p \in U,$$

una contradicción.

Por lo tanto existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \supset X_i$ para toda $i \geq N$. ■

Lema 1.15. *Sea $(X_i)_i$ una sucesión de continuos en un continuo X tal que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ es un continuo.*

Demostración.

Sea $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Por el Teorema 1.14, Z es un espacio métrico compacto y no vacío. Para probar la conexidad de Z, supongamos lo contrario.
Entonces existen dos cerrados ajenos y no vacíos A y B de X tales que $Z = A \cup B$. Dado que X es un espacio normal, existen dos abiertos ajenos V y W tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Por el Teorema 1.14, para $U = V \cup W$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$ para todo

$i \geq N$. Sea $i \geq N$. Necesitamos probar las siguientes afirmaciones.

Afirmacion 1 Entonces $X_i = (X_i \cap V) \cup (X_i \cap W)$.

Claramente

$$(X_i \cap V) \cup (X_i \cap W) \subset X_i.$$

Ahora, Sea $x \in X_i$. Dado que

$$X_i \subset U \text{ y } U = V \cup W, x \in V \text{ o } x \in W.$$

Así, $x \in X_i \cap V$ o $x \in X_i \cap W$.
Por lo que

$$X_i = (X_i \cap V) \cup (X_i \cap W).$$

Afirmacion 2 Entonces $X_i \cap V \neq \emptyset$ y $X_i \cap W \neq \emptyset$.

Dado que A y B son no vacíos,

$$A \subset X_i \cap V \text{ y } B \subset X_i \cap W,$$

$$X_i \cap V \neq \emptyset \text{ y } X_i \cap W \neq \emptyset.$$

Usando que $X_i \cap V$ y $X_i \cap W$ son abiertos en X_i, por las Afirmaciones 1 y 2, X_i no es conexo, una contradicción.

Concluimos que Z es conexo. Por lo tanto Z es un continuo. ■

Lema 1.16. *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $r > 0$. Entonces*

$$\mathrm{Cl}(N(A, r)) \subset N(A, 2r).$$

Demostración.

Sea $z \in \mathrm{Cl}(N(A, r))$. Entonces

$$B_r(z) \cap N(A, r) \neq \emptyset.$$

Sea $x \in B_r(z) \cap N(A, r)$. De donde existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$.

De modo que

$$d(a,z) \leq d(a,x) + d(x,z) < r + r = 2r.$$

De esto, concluimos que $d(a,z) < 2r$. Por lo que $z \in N(A,2r)$.

Por lo tanto

$$\mathrm{Cl}(N(A,r)) \subset N(A,2r).$$

■

Capítulo 2

El hiperespacio 2^X

Dado un continuo X, definimos el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X como el conjunto:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Al hiperespacio 2^X lo consideramos con la topología de Vietoris, la cual la describiremos a continuación. Primero vamos a dar algunas definiciones. Sean $E_1, \ldots, E_k$ subconjuntos de X, definimos:

$$\langle E_1, \ldots, E_k \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} E_i \text{ y } A \cap E_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

El siguiente lema enlista algunas propiedades de los conjuntos definidos anteriormente para 2^X.

Lema 2.1.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \in X$. Se tienen las siguientes propiedades.

a) $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$.

b) $\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle$.

c) $\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$.

d) $\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.

e) Si $\Theta : 2^X \to 2^X$ *una función, entonces* $\{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset\} = \Theta^{-1}(\langle U_1, X\rangle)$.

f) Si $\Theta : 2^X \to 2^X$ *una función, entonces* $\{A \in 2^X : \Theta(A) \subseteq U_1\} = \Theta^{-1}(\langle U_1\rangle)$.

Demostración.

A continuación probaremos a).
Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle$. Es fácil ver que $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i\rangle$. Notemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $A \in \langle X, U_i\rangle$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Por lo que

$$A \in \langle\bigcup_{i=1}^{k} U_i\rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k}\langle X, U_i\rangle).$$

Por otro lado, sea $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i\rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i\rangle)$. Entonces

$$A \in \langle\bigcup_{i=1}^{k} U_i\rangle \text{ y } A \in \bigcap_{i=1}^{k}\langle X, U_i\rangle.$$

Así $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De donde $A \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle$.
Por lo tanto

$$\langle U_1, \ldots, U_k\rangle = \langle\bigcup_{i=1}^{k} U_i\rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k}\langle X, U_i\rangle).$$

Ahora demostraremos la parte b).

Sea $A \in \langle U_1\rangle \cap \langle U_2\rangle$. Entonces $A \in \langle U_1\rangle$ y $A \in \langle U_2\rangle$. De lo anterior, se tiene que

$$A \subset U_1 \cap\ U_2.$$

Por lo que $A \in \langle U_1 \cap U_2\rangle$.

Por otro lado, sea $A \in \langle U_1 \cap U_2\rangle$. Entonces $A \subset U_1 \cap U_2$. Así, $A \subset U_i$ para $i \in \{1, 2\}$. De donde, $A \in \langle U_1\rangle \cap \langle U_2\rangle$. Concluimos

$$\langle U_1\rangle \cap \langle U_2\rangle = \langle U_1 \cap U_2\rangle.$$

En seguida probaremos c).

Para la primera contención, sea $A \in \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Entonces

$$A \subset X \cup U_1 \cup U_2,$$

$$A \cap U_1 \neq \emptyset \text{ y } \quad A \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Por lo que

$$A \in \langle X, U_1, U_2 \rangle.$$

Para la segunda contención, sea $A \in \langle X, U_1, U_2 \rangle$. Entonces $A \cap U_1 \neq \emptyset \neq A \cap U_2$ y $A \cap X \neq \emptyset$. Notemos que

$$X \cup U_1 = X = X \cup U_2,$$

así $A \in \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$.

Por tanto

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle.$$

Acto seguido justificaremos d).

Sea $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Entonces, dado que

$$A \in \langle U_1 \rangle \quad \text{y} \quad U_1 = U_1 \cup (U_1 \cap U_2),$$

se tiene que

$$A \subset U_1 \cup (U_1 \cap U_2).$$

Ahora, dado que $A \subset U_1$, se tiene que

$$(A \cap U_1) \cap U_2 = A \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Así, $A \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Por lo que $A \in \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.

Demostraremos $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Sea $A \in \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$. Dado que

$$A \subset U_1 \cup (U_1 \cap U_2) = U_1 \text{ y } \quad A \cap U_1 \neq \emptyset, A \in \langle U_1 \rangle.$$

Por otro lado, como

$$A \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset, A \in \langle X, U_2 \rangle.$$

Por lo que $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$.

Concluimos

$$\langle U_1\rangle \cap \langle X, U_2\rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2\rangle.$$

Para probar e), sea $A \in \{B \in 2^X : \Theta(B) \cap U_1 \neq \emptyset\}$. Entonces

$$\Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset.$$

Así, $\Theta(A) \in \langle U_1, X\rangle$. De donde, $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1, X\rangle)$.

Para ver la otra contención, sea $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1, X\rangle)$. Entonces

$$\Theta(A) \in \langle U_1, X\rangle \ \text{ y } \ \Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset.$$

Así, $A \in \{B \in 2^X : \Theta(B) \cap U_1 \neq \emptyset\}$. Podemos concluir la prueba para e).

Finalmente para probar f), sea $A \in \{B \in 2^X : \Theta(B) \subset U_1\}$. Entonces $\Theta(A) \subset U_1$.

Así, $\Theta(A) \in \langle U_1\rangle$. De donde, $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1\rangle)$.

Por otro lado, sea $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1\rangle)$. Entonces $\Theta(A) \in \langle U_1\rangle$ y $\Theta(A) \subset U_1$. Así,

$$A \in \{B \in 2^X : \Theta(B) \subset U_1\}.$$

Esto demuestra f).

■

Ahora vamos a definir la topologia de Vietoris de la siguiente manera. Sean X un continuo con τ_X su topología y

$$\mathcal{S} = \{\langle U\rangle : U \in \tau_X\} \cup \{\langle X, U\rangle : U \in \tau_X\}.$$

Sea τ_V la minima topología que tiene como subbase a $\mathcal{S}$ para 2^X.

El siguiente resultado permite obtener una base para la topología τ_{V}.

Teorema 2.2. *Sea (X, τ_{X}) un espacio topológico. La familia*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} = \{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle : U_1, \ldots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\}$$

es una base para τ_V.

Demostración.

Sean

$$\mathcal{S} = \{\langle U\rangle : U \in \tau_{\mathrm{X}}\} \cup \{\langle X, U\rangle : U \in \tau_{\mathrm{X}}\}$$

y $\mathcal{S}^*$ la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Dado que la familia $\mathcal{S}$ es una subbase para τ_V, es suficiente probar que

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_{\mathrm{V}}.$$

Primero probaremos que:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} \subset \mathcal{S}^*.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \in \tau_X$ tales que $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \in \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$. Probaremos que $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \in \mathcal{S}^*$.

Por Lema 2.1. a), $\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \in \mathcal{S}^*$.

Finalmente veamos que:

$$\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}.$$

Sean $U_1, U_2 \in \tau_X$ tales que

$$\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle, \langle X, U_1\rangle, \langle X, U_2\rangle \in \mathcal{S}.$$

Por lo obtenido en b), c) y d) del Lema 2.1, se concluye que $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathrm{V}}$ es base para la topología de Vietoris τ_V. ■

2.1. La métrica de Hausdorff para 2^X

Definición 2.3. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes hiperespacios de X.*

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\},$$

$$F_n(p, X) = \{A \in F_n(x) : p \in A\},$$

$$2^X_p = \{A \in 2^X : p \in A\}.$$

Para un continuo X definiremos una métrica para 2^X de la siguiente manera. Para cada $A, B \in 2^X$, definimos

$$E(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \in N(\epsilon, B) \text{ y } B \in N(\epsilon, A)\}.$$

Definición 2.4. *Sea X un continuo, definimos la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como*

$$H(A, B) = \inf E(A, B)$$

para cada $A, B \in 2^X$.

A continuación probaremos que H es una métrica para 2^X.

Teorema 2.5. *Para un continuo X la función H es métrica para 2^X.*

Demostración.

a) Primero vamos a probar que la función H está bien definida. Sean $A, B \in 2^X$. Dado que $A \neq \emptyset$, podemos elegir $a_0 \in A$. Como B es compacto y acotado, existe $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ tal que $B \subset B_\delta(x_0)$.
Sea $\epsilon = d(a_0, x_0) + \delta$. Claramente $\epsilon > 0$. Necesitamos probar

$$B \subset B_\epsilon(a_0) \subset N(\epsilon, A).$$

Observemos que

$$B_\epsilon(a_0) \subset N(\epsilon, A).$$

Sea $x \in B$. Dado que $B \subset B_\delta(x_0)$, $d(x, x_0) < \delta$, así

$$d(x, a_0) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a_0) < \delta + d(x_0, a_0) = \epsilon.$$

Por lo que $d(x, a_0) < \epsilon$. De donde $x \in B_\epsilon(a_0)$. Así, $x \in N(\epsilon, A)$. Concluimos

$$B \subset B_\epsilon(a_0) \subset N(\epsilon, A).$$

Usando un argumento similar al anterior, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $A \subset N(\epsilon_1, B)$.
Sea $\epsilon_2 = \max\{\epsilon_1, \epsilon\}$. Así

$$B \subset N(\epsilon_2, A) \text{ y } A \subset N(\epsilon_2, B).$$

Concluimos que $\epsilon_2 \in E(A, B)$. De esto y de que $E(A, B)$ está acotado inferiormente por el cero, H está bien definida.

b) Dado que $E(A, B)$ está acotado inferiormente por el cero, $H(A, B) \geq 0$.

c) Claramente $H(A, B) = H(B, A)$.

d) Vamos a probar que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
Supongamos $H(A, B) = 0$. Necesitamos demostrar que $E(A, B) = (0, \infty)$.

Es claro que $E(A, B) \subset (0, \infty)$. Falta demostrar que $E(A, B) \supset (0, \infty)$. Sea $\delta \in (0, \infty)$.
Entonces el número δ no es cota inferior de $E(A, B)$.
Así, existe $\epsilon \in E(A, B)$ tal que $\epsilon < \delta$. Dado que $\epsilon \in E(A, B)$,

$$A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A),$$

así

$$A \subset N(\epsilon, B) \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A) \subset N(\delta, A)$$

De donde $\delta \in E(A, B)$. Por lo que

$$E(A, B) = (0, \infty).$$

De lo anterior,

$$A \subset N(\frac{1}{n}, B) \text{ y } B \subset N(\frac{1}{n}, A)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, probaremos que $A = B$.

Para la primera contención, sea $x \in A$. Entonces $x \in N(\frac{1}{n}, B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por definición, existe $b_n \in B$ tal que $d(x, b_n) < \frac{1}{n}$. Por el Lema 1.7, la sucesión $(b_n)_n$ converge a x. Así, dado que B es cerrado y $(b_n)_n \subset B$, $x \in B$. Esto prueba que $A \subset B$.

Para probar la otra contención, sea $x \in B$. Entonces $x \in N(\frac{1}{n}, A)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por definición, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. Por el Lema 1.7, la sucesión $(a_n)_n$ converge a x. Así, dado que A es cerrado y $(a_n)_n \subset A$, $x \in A$. Esto prueba que $B \subset A$. Concluimos $A = B$.

Para probar la Suficiencia, supongamos que $A = B$. Vamos a probar que $H(A, B) = 0$. Primero veamos que $E(A, B) = (0, \infty)$. Claramente $E(A, B) \subset (0, \infty)$. Para la otra contención, sea $\delta \in (0, \infty)$. Dado que

$$A \subset N(\delta, A) \text{ y } B \subset N(\delta, B) \text{ y } A = B,$$

tenemos que

$$B \subset N(\delta, A) \text{ y } A \subset N(\delta, B).$$

De donde $\delta \in E(A, B)$. Por lo que

$$E(A, B) = (0, \infty).$$

Así

$$H(A, B) = \inf E(A, B) = \inf (0, \infty) = 0.$$

$\blacksquare$

Es conocido que para un continuo X, la topología de Vietoris para 2^X coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff H. En este trabajo usaremos este hecho sin hacer referencia a ello. También usaremos que 2^X y $C(X)$ con la métrica de Hausdorff son continuos ([5, Teoremas 0.8, 1.9, 1.12, pp. 7, 63, 65]).

Definición 2.6. *Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Decimos que una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \to 2^X$ es un arco ordenado de A_0 a A_1 si se cumplen las siguientes condiciones :*

1) $\alpha(0) = A_0$, $\alpha(1) = A_1$;

2) si $0 \leq t < s \leq 1$, entonces $\alpha(t) \subset \alpha(s)$ y $\alpha(t) \neq \alpha(s)$.

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [5, Teorema 1.8, p. 59].

Teorema 2.7. *Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) Existe un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1;

2) $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Corolario 2.8. *Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subset A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de A_0 a A_1.*

Lema 2.9. *Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$. Entonces $H(A,B) < \epsilon$ si y sólo si*

$$A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Demostración.

Para demostrar la Necesidad, sea $\epsilon > 0$. Supongamos $H(A,B) < \epsilon$. Sea $\epsilon' \in \mathbb{R}$ tal que $H(A,B) < \epsilon' < \epsilon$. Por definición de ínfimo, existe $0 < r < \epsilon'$ tal que

$$A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A).$$

Entonces

$$B \subset N(r, A) \subset N(\epsilon', A) \subset N(\epsilon, A)$$

y

$$A \subset N(r, B) \subset N(\epsilon', B) \subset N(\epsilon, B).$$

Así

$$A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Para la Suficiencia, supongamos que

$$A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Probaremos que existen $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \eta < \epsilon \ ; A \subset N(\eta, B) \text{ y } B \subset N(\eta, A).$$

Necesitamos probar la siguiente afirmación.

Afirmación. $A \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\epsilon} N(\delta, B)$.

Sea $a \in A$. Dado que $A \subset N(\epsilon, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Tomemos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $d(a, b) < \delta < \epsilon$. Entonces

$$a \in B(\delta, b) \subset N(\delta, B),$$

por lo que $A \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\epsilon} N(\delta, B)$.

Por la compacidad de A y de la Afirmación anterior, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n < \epsilon$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B).$$

Definamos $\eta_1 = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Entonces

$$0 < \eta_1 < \epsilon \text{ y } A \subset N(\eta_1, B).$$

De forma análoga, podemos encontrar $\eta_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \eta_2 < \epsilon \text{ y } B \subset N(\eta_2, A).$$

Tomemos $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$. Entonces $0 < \eta < \epsilon$ y

$$A \subset N(\eta, B) \text{ y } B \subset N(\eta, A).$$

Por tanto

$$H(A, B) \leq \eta < \epsilon.$$

■

Teorema 2.10. *Sean X un continuo, $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ dos sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$ para algunos $A, B \in 2^X$. Entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$.*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$. Dado que $A_n \to A$ y $B_n \to B$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $H(A_n, A) < \epsilon$ para toda $n \geq N_1$ y $H(B_n, B) < \epsilon$ para toda $n \geq N_2$. Sean $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$.
Por el Lema 2.9,

$$A_n \subset N(\epsilon, A), A \subset N(\epsilon, A_n),$$
$$B_n \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, B_n).$$

De donde

$$A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B) \text{ y}$$
$$A \cup B \subset N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n) \subset N(\epsilon, A_n \cup B_n).$$

Así,

$$A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A \cup B) \quad \text{y} \quad A \cup B \subset N(\epsilon, A_n \cup B_n).$$

Usando el Lema 2.9,

$$H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \epsilon.$$

Por lo tanto $A_n \cup B_n \to A \cup B$. ■

Lema 2.11. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces la sucesión* $(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))_n$ *converge a A en 2^X.*

Demostración. Sean d la métrica de X, $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$. Claramente

$$A \subset N(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})), \epsilon).$$

Ahora, sea $x \in \mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))$. Entonces

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \cap N(A, \frac{1}{n})) \neq \emptyset.$$

Sea

$$z \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap N(A, \frac{1}{n})$$

Así, $d(x, z) < \frac{1}{n}$ y existe $a \in A$ tal que $d(z, a) < \frac{1}{n}$. Por lo que

$$d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon.$$

De donde $x \in N(A, \epsilon)$. Esto prueba que

$$\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) \subset N(A, \epsilon).$$

Usando el Lema 2.9, $H(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})), A) < \epsilon$.

Concluimos que

$$\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) \to A.$$

■

2.2. Limites inferior y superior

Definición 2.12. *Sean X un continuo y $(A_n)_n \subset 2^X$ definimos:*

$$\begin{aligned} \textit{Lim inf } A_n &= \{x \in X : \textit{para toda } \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \\ &\quad \textit{para casi toda } n \textit{ salvo un número finito}\}, \\ \textit{Lim sup } A_n &= \{x \in X : \textit{para toda } \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \\ &\quad \textit{para una inifinidad de } n\textit{'s}\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.13. *Sean X un continuo y $(A_n)_n \subset 2^X$. Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

a) *Lim sup $A_n \neq \emptyset$.*

b) *Lim inf $A_n \subset$ Lim sup A_n.*

c) *Lim sup A_n y Lim inf A_n son cerrados en X.*

d) *Si $(B_n)_n \subset 2^X$ tal que $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces Lim inf $A_n \subset$ Lim inf B_n.*

Demostración.

Para probar a), por cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $a_n \in A_n$. Como X es compacto, existe $x \in X$ y una subsucesión de $(a_{n_k})_k$ de la sucesión $(a_n)_n$ tales que $a_{n_k} \to x$. Dado $\epsilon > 0$, existe un número natural K tal que $a_{n_k} \in B_\epsilon(x)$ para toda $k \geq K$. De donde,

$$B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$$

para una infinidad de n's. Por lo que $x \in$ Lim sup A_n. Así, Lim sup $A_n \neq \emptyset$.

Para demostrar *b*), sea $x \in \text{Lim inf } A_n$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Por lo que $x \in \text{Lim sup } A_n$. De donde,

$$\text{Lim inf } A_n \subset \text{Lim sup } A_n.$$

Con el fin de probar *c*), sean $x \in \text{Cl}(\text{Lim sup } A_n)$ y $\epsilon > 0$. Entonces

$$\text{Lim sup } A_n \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset.$$

Sea $z \in \text{Lim sup } A_n \cap B_\epsilon(x)$. Como $z \in B_\epsilon(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset B_\epsilon(x)$. Dado que

$$z \in \text{Lim sup } A_n,\ B_\delta(z) \cap A_n \neq \emptyset$$

para una infinidad de n's. De aquí, $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Por lo que $x \in \text{Lim sup } A_n$. Concluimos que

$$\text{Cl}(\text{Lim sup } A_n) \subset \text{Lim sup } A_n$$

y el $\text{Lim sup } A_n$ es un conjunto cerrado.

Para probar la segunda parte de *c*), sean $x \in \text{Cl}(\text{Lim inf } A_n)$ y $\epsilon > 0$. Entonces

$$\text{Lim inf } A_n \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset.$$

Sea $z \in \text{Lim inf } A_n \cap B_\epsilon(x)$. Como $z \in B_\epsilon(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset B_\epsilon(x)$. Dado que $z \in \text{Lim inf } A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\delta(z) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. De aquí, $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Por lo que $x \in \text{Lim inf } A_n$. Concluimos que

$$\text{Cl}(\text{Lim inf } A_n) \subset \text{Lim inf } A_n$$

y el $\text{Lim inf } A_n$ es un conjunto cerrado.

La prueba *d*), se sigue de la definición de limite inferior.

■

Teorema 2.14. *Sea (X, d) un continuo. Sea $(A_n)_n \subset 2^X$. Si $(A_n)_n$ converge con la métrica de Hausforff a un $A \in 2^X$, entonces*

$$\textit{Lim inf } A_n = A = \textit{Lim sup } A_n.$$

Demostración.

Supongamos que $(A_n)_n$ converge con la metrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$. Demostraremos que

$$\text{Lim inf } A_n = A = \text{Lim sup } A_n.$$

De la definición de los límites inferior y superior,

$$\text{Lim inf } A_n \subset \text{Lim sup } A_n.$$

Ahora vamos a demostrar que $A \subset \text{Lim inf } A_n$. Sea $a \in A$ y $\epsilon > 0$. Como $A_n \longrightarrow A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Por el Lema 2.9,

$$A \subset N(\epsilon, A_n) \text{ y } \quad A_n \subset N(\epsilon, A) \, \text{para toda } n \geq N.$$

Sea $n \geq N$. Entonces $a \in N(\epsilon, A_n)$ y existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \epsilon$. De manera que $x_n \in A_n \cap B_\epsilon(a)$. Por lo que hemos probado que $A_n \cap B_\epsilon(a) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Por la definición de límite inferior, $a \in \text{Lim inf } A_n$. Por lo que

$$A \subset \text{Lim inf } A_n$$

.

Por otro lado, queremos demostrar que Lim sup $A_n \subset A$. Supongamos que Lim sup A_n no está contenido en A. Así existe $x \in \text{Lim sup } A_n$ tal que $x \notin A$. Dado que A es cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$. Dado que $x \in \text{Lim sup } A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Como $A_n \longrightarrow A$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N'$. Por el Lema 2.9,

$$A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n) \text{ y } \quad A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$$

para toda $n \geq N'$.

Sea $M = \max\{N, N'\}$. Sea $m \geq M$. Entonces $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap A_m \neq \emptyset$. Elegimos $z \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap A_m$. Así

$$d(x, z) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \quad z \in A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A).$$

De aqui que existe $a \in A$ tal que $d(z, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Por desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Entonces $d(x,a) < \epsilon$ y $a \in B_\epsilon(x) \cap A$, una contradicción. Por lo que $\text{Lim sup } A_n \subset A$. Concluimos que

$$\text{Lim sup } A_n = A = \text{Lim inf } A_n.$$

$\blacksquare$

Teorema 2.15. *Sea (X,d) un continuo. Sean $(A_n)_n \subset 2^X$ y $A \subset X$. Si $A = \text{Lim inf } A_n = \text{Lim sup } A_n$, entonces $(A_n)_n$ converge con la métrica de Hausforff a A.*

Demostración.

Supongamos que $A = \text{Lim sup } A_n = \text{Lim inf } A_n$. Dado que $\text{Lim sup } A_n$ es cerrado y no vacío, $A \in 2^X$. Finalmente demostraremos que $(A_n)_n$ converge a A. Sea $\epsilon > 0$. Necesitamos demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación.

a) Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\epsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$.

b) Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\epsilon, A)$ para toda $n \geq M_2$.

Veamos a). Dado que la familia $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y A es un compacto, existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_m).$$

Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $A = \text{Lim inf } A_n$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i) \neq \emptyset$ para toda $n \geq N_i$. Sea $M_1 = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$. Vamos a probar que $A \subset N(\epsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$. Sea $a \in A$. Entonces existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $d(a, a_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Sean $n \geq M_1$ y $z \in A_n \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i)$. Así,

$$d(a,z) \leq d(a,a_i) + d(a_i,z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo que $a \in N(\epsilon, A_n)$. Concluimos que $A \subset N(\epsilon, A_n)$.

Para probar b), supongamos lo contrario. Entonces para toda $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $A_n \not\subset N(\epsilon, A)$. De lo anterior, tenemos lo siguiente:

i) para $N = 1$, existe $n_1 \geq 1$ tal que $A_{n_1} \not\subset N(\epsilon, A)$;

ii) para $N = n_1 + 1$, existe $n_2 \geq n_1 + 1$ tal que $A_{n_2} \not\subset N(\epsilon, A)$;

iii) para $N = n_2 + 1$, existe $n_3 \geq n_2 + 1$ tal que $A_{n_3} \not\subset N(\epsilon, A)$.

Continuando con este proceso, se prueba que existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tal que $A_{n_k} \not\subset N(\epsilon, A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos

$$x_{n_k} \in A_{n_k} \setminus N(\epsilon, A).$$

Ahora, como X es compacto, existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $(x_{n_{k_l}})_l$ de (x_{n_k}) tal que $x_{n_{k_l}} \to x_0$. Dado que

$$(x_{n_{k_l}})_l \subset X \setminus N(\epsilon, A)$$

y este conjunto es cerrado,

$$x_0 \in X \setminus N(\epsilon, A).$$

Entonces $x_0 \notin A$.

Por otra parte, tenemos que $x_{n_{k_l}} \to x_0$ y $(A_{n_{k_l}})_l$ es una subsucesión de $(A_n)_n$, $x_0 \in$ lim sup $A_n = A$. Por lo que $x_0 \in A$, una contradicción. Esto termina la prueba de b).

Finalmente sea $M = \max\{M_1, M_2\}$ y $n \geq M$. Por la afirmación,

$$A \subset N(\epsilon, A_n) \text{ y } A_n \subset N(\epsilon, A).$$

Por el Lema 2.9, $H(A_n, A) < \epsilon$ para toda $n \geq M$.

Por lo tanto $(A_n)_n$ converge a A.

■

Teorema 2.16. *Sean X un continuo, $A, B \in 2^X$ y dos sucesiones $(A_n)_n, (B_n)_n \subset 2^X$ tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.*

Demostración.

Sean $a \in A$ y $\epsilon > 0$. Por el Teorema 2.14, Lim inf $A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(a) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Dado que $A_n \subset B_n$ para toda $n \geq N$, $B_\epsilon(a) \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Entonces $a \in$ Lim inf $B_n = B$ (por el Teorema 2.14). Por lo tanto $A \subset B$. $\blacksquare$

Teorema 2.17. *Sean X un continuo, $A, B \in 2^X$ y $(A_n)_n$,$(B_n)_n \subset 2^X$ tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos $a_n \in A_n \cap B_n \subset X$. Dado que X es compacto, existe una subsucesión $(a_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$ convergente a algún $a \in X$. Por lo que $a \in \text{Lim sup } A_n \cap \text{Lim sup } B_n$. Por el Teorema 2.14, $a \in A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.18. *Sean (X, d) un continuo y $(A_n)_n \subset 2^X$. Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

i) *$x \in$ Lim inf A_n si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$.*

ii) *$x \in$ Lim sup A_n si y sólo si existen dos sucesiones $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ y $(x_{n_k})_k \subset X$ tales que $n_1 < n_2 < \cdots$, $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_{n_k} \to x$.*

Demostración.

Para demostrar la Necesidad de i), sea $x \in \text{Lim inf } A_n$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como A_n es compacto, por el Lema 1.11, existe $x_n \in A_n$ tal que

$$d(x, x_n) = \inf \{d(x, y) : y \in A_n\}.$$

Vamos a demostrar que $x_n \to x$. Sea $\epsilon > 0$. Como $x \in \text{Lim inf } A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Para toda $n \geq N$, elegimos $a_n \in B_\epsilon(X) \cap A_n$. Sea $n \geq N$. Por la construción de la sucesión $(x_n)_n$,

$$d(x, x_n) \leq d(x, a_n).$$

Como

$$a_n \in B_\epsilon(x), d(x, x_n) < \epsilon.$$

Por lo que la sucesión $(x_n)_n$ converge a x.
Para la Suficiencia de i), sea $(x_n)_n$ una sucesión que converge a x tal que $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\epsilon(x)$ para toda $n \geq N$. Así, $B_\epsilon(X) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Por lo que $x \in \text{Lim inf } A_n$.

Para probar *ii*). Sea $x \in \text{Lim sup } A_n$. Para $\epsilon = 1$, existe $N_1 \subset N$ infinito tal que $B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in N_1$. Ahora, elegimos

$$n_1 \in N_1 \text{y } x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}.$$

Para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $N_2 \subset N$ infinito tal que $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in N_2$. Dado que N_2 es infinito, existe $n_2 \in N_2$ tal que $n_2 > n_1$. Así, elegimos

$$x_{n_2} \in B(x)_{\frac{1}{2}} \cap A_{n_2}.$$

Continuando con este proceso podemos construir una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. Como $\frac{1}{k} \to 0$, tenemos que $x_{n_k} \to x$. Esto prueba la Necesidad de *ii*).

Finalmente, supongamos que existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in N$ tal que $k_{n_k} \to x$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $K \in N$ tal que $x_{n_k} \in B_\epsilon(x)$ para todo $k \geq K$. De donde $B_\epsilon(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para todo $k \geq K$.Por lo que

$$x \in \text{Lim sup } A_n.$$

Esto termina la prueba de la Suficiencia de *ii*). ■

Lema 2.19. *Sean X un continuo, $x \in X$, $(A_n)_n \subset 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$ para toda $n \geq N$. Entonces $x \in$ Lim inf (A_n).*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$. Dado que $x \in B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$, $x \in \text{Lim inf } (A_n)$. ■

2.3. Funciones multivaluadas

Definición 2.20. *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *continuos,* $x_0 \in X$*,* $f : X \to 2^Y$ *una función. Decimos que* f *es:*

- **semicontinua inferiormente** *(l.s.c.) en* x_0 *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo punto* $x \in X$ *con* $d(x, x_0) < \delta$ *y para todo* $y \in f(x_0)$ *podemos encontrar* $z \in f(x)$ *con* $d'(y, z) < \epsilon$.

- **semicontinua superiormente** *(u.s.c.) en* x_0 *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo punto* $x \in X$ *con* $d(x, x_0) < \delta$ *y para todo* $z \in f(x)$ *podemos encontrar* $y \in f(x_0)$ *con* $d'(y, z) < \epsilon$.

- **continua** *en* x_0 *siempre que sea l.s.c. y u.s.c. en* x_0.

Definición 2.21. *Sea* X *un continuo. Diremos que* $f : X \to 2^X$ *es l.s.c. (u.s.c., continua) si* f *es l.s.c. (u.s.c., continua) en cada punto de* X.

Proposición 2.22. *Sean* (X, d) *y* (Y, d') *continuos y* $f : X \to 2^Y$ *una función. Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

1) f *es l.s.c. en* x_0 *si y sólo si* $f(x_0) \subset$ *Lim inf* $f(x_n)$ *para cada sucesión* $(x_n)_n$ *en* X *tal que* $x_n \to x_0$*;*

2) f *es u.s.c. en* x_0 *si y sólo si Lim sup* $f(x_n) \subset f(x_0)$ *para cada sucesión* $(x_n)_n$ *en* X *tal que* $x_n \to x_0$*;*

3) f *es continua en* x_0 *si y sólo si* $\operatorname{Lim} f(x_n) = f(x_0)$ *para toda sucesión* $(x_n)_n$ *en* X *tal que* $x_n \to x_0$.

Demostración.

Para la Necesidad de 1), sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x_0$. Supongamos que f es l.s.c. en x_0. Sean $y \in f(x_0)$ y $\epsilon > 0$.
Probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(y) \cap f(x_n) \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$.
Dado que f es l.s.c., existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in X$ con $d(x, x_0) < \delta$ y para toda $y \in f(x_0)$, existe $z \in f(x)$ tal que $d'(y, z) < \epsilon$. Como $x_n \to x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$ para toda $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Entonces existe $z_n \in f(x_n)$ tal que $d'(y, z_n) < \epsilon$. Así,

$$z_n \in B_\epsilon^{d'}(y) \cap f(x_n)$$

para toda $n \geq N$. Por lo tanto $y \in \text{Lim inf } f(x_n)$.

Para la Suficiencia, supongamos que $f(x_0) \subset \text{Lim inf } f(x_n)$ para toda sucesión $(x_n)_n$ tal que $x_n \to x_0$. Para demostrar que f es l.s.c en x_0, supongamos lo contrario. Entonces existe $\epsilon > 0$, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n \in X$ con

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ y } y_n \in f(x_0)$$

tales que, para toda $z \in f(x_n)$, se tiene que $d'(z, y_n) \geq \epsilon$. Como $(y_n)_n \subset f(x_0)$ y $f(x_0)$ es compacto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $y_n \to y$ para algún $y \in f(x_0)$. Dado que $x_n \to x_0$, por hipótesis, $y \in \text{Lim inf } f(x_n)$. Por la definición de limite inferior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d'}(y) \cap f(x_n) \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Elegimos

$$z_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d'}(y) \cap f(x_n) \text{ para toda } n \geq N.$$

Por la compacidad de X, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z_n \to z$ para algún $z \in X$. Usando que $(z_n)_{n \geq N} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}^{d'}(y)$, $d'(z_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \geq N$. Así

$$d'(z_n, y) \to d'(z, y), d'(z, y) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Por otro lado, dado que $z_n \in f(x_n)$ para toda $n \geq N$, $d'(z_n, y_n) \geq \epsilon$ para toda $n \geq N$. Así, por la continuidad de la métrica d',

$$d'(z_n, y_n) \to d'(z, y) \text{ y } d'(z, y) \geq \epsilon,$$

una contradicción. Por lo tanto f es l.s.c.

Para demostrar la Necesidad de 2), supongamos que f es u.s.c. Sean $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x_0$ y $y \in \text{Lim sup } f(x_n)$. Vamos a demostrar que $y \in f(x_0)$. Supongamos que $y \notin f(x_0)$. Dado que $f(x_0)$ es cerrado, existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^{d'}(y) \subset X \setminus f(x_0)$. Usando que f es u.s.c., para $\frac{\epsilon}{4}$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $d(x, x_0) < \delta$ y para todo $z \in f(x)$, se tiene que existe $y \in f(x_0)$ tal que $d'(y, z) < \frac{\epsilon}{4}$. Como $x_n \to x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la $d(x_n, x_0) < \delta$ para toda $n \geq N$. Dado que $y \in \text{Lim sup } f(x_n)$, existe una sucesión $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que

$$n_1 < n_2 < \cdots \text{ y } B_{\frac{\epsilon}{4}}^{d'}(y) \cap f(x_{n_k}) \neq \emptyset \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ y $z_{n_k} \in B_{\frac{\epsilon}{4}}^{d'}(y) \cap f(x_{n_k})$. Dado que $d(x_0, x_{n_k}) < \delta$, existe $y_{n_k} \in f(x_0)$ tal que $d'(y_{n_k}, z_{n_k}) < \frac{\epsilon}{4}$. Por la compacidad de X y de $f(x_0)$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $y_{n_k} \to y_0$ para algún $y_0 \in f(x_0)$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_{k_0} \geq N \text{ y } d'(y_{n_{k_0}}, y_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,

$$d'(y_0, y) \leq d'(y_0, y_{n_{k_0}}) + d'(y_{n_{k_0}}, z_{n_{k_0}}) + d'(z_{n_{k_0}}, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

De donde $y_0 \in B_\epsilon^{d'}(y) \subset X \setminus f(x_0)$, una contradicción. Por lo que $y \in f(x_0)$.
Concluimos que

$$\text{Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0).$$

Probaremos la Suficiencia de 2). Con el fin de probar que f es u.s.c. en x_0, supongamos lo contrario. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n \in X$ con $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ y $z_n \in f(x_n)$ tales que para todo $y \in f(x_0)$, se tiene $d'(y, z_n) \geq \epsilon$. Dado que $x_n \to x_0$, por hipótesis, $\text{Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0)$. Por la compacidad de X, existe una sucesión $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$ y $z_{n_k} \to z_0$ para algún $z_0 \in X$.
Entonces

$$z_0 \in \text{Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0).$$

Así, $z_0 \in f(x_0)$. Por lo que $d'(z_0, z_{n_k}) \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De donde

$$\lim_{k \to \infty} d'(z_0, z_{n_k}) = d'(z_0, z_0) = 0 \geq \epsilon,$$

una contradiccón. Por lo tanto f es u.s.c. en x_0.

Para demostrar la Necesidad de 3), supongamos que f es continua en x_0. Sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x_0$. Entonces f es l.s.c y u.s.c en x_0. Por 1) y 2), tenemos que

$$f(x_0) \subset \text{Lim inf } f(x_n) \text{ y } \text{Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0).$$

Así, dado que

$$\text{Lim inf } f(x_n) \subset \text{Lim sup } f(x_n), f(x_0) = \text{Lim inf } f(x_n) = \text{Lim sup } f(x_n).$$

Usando el Teorema 2.14,

$$\text{Lim}\, f(x_n) = f(x_0).$$

Para la Suficiencia de 3), sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x_0$. Dado que $\text{Lim}\, f(x_n) = f(x_0)$, por el Teorema 2.15,

$$f(x_0) = \text{Lim inf } f(x_n) = \text{Lim sup } f(x_n).$$

Por lo que

$$f(x_0) \subset \text{Lim inf } f(x_n) \text{ y Lim sup } f(x_n) \subset f(x_0).$$

De donde f es l.s.c y u.s.c en x_0. Concluimos que f es continua x_0.

■

Capítulo 3

Funciones sobre hiperespacios

A continuación estudiaremos cuatro funciones muy especificas para las cuales analizaremos su continuidad y su relación con los continuos suaves.

Definición 3.1. *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Definimos las siguientes funciones*

$$f, g : 2^X \to C(X) \text{ como:}$$

$$f(A) = \bigcap\{K \in C(X) : A \subset K\} \text{ y}$$

$$g(A) = \bigcap\{K \in C(X) : A \subset \operatorname{Int}(K)\}.$$

Proposición 3.2. *Las funciones f y g están bien definidas.*

Demostración.

Sea $A \in 2^X$. Dado que $A \subset f(A) \cap g(A)$, por Teorema 1.5, $f(A)$ y $g(A)$ son subcontinuos de X. ■

Definición 3.3. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Definimos*

$$\mathcal{G}(A) = \{K \in C(X) : A \subset \operatorname{Int}(K)\} \text{ y}$$

$$\mathcal{F}(A) = \{K \in C(X) : A \subset K\}$$

Definición 3.4. *Sea X un continuo. Definamos las siguientes funciones*

$$F, G : 2^X \longrightarrow C(C(X)) \text{ como:}$$

$$F(A) = \mathcal{F}(A) \text{ y}$$

$$G(A) = \mathrm{Cl}_{C(C(X))}(\mathcal{G}(A)).$$

Teorema 3.5. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces $\mathcal{F}(A)$ y $\mathrm{Cl}_{C(C(X))}(\mathcal{G}(A))$ son subcontinuos de $C(X)$.*

Demostración.

Por el Teorema 2.16, se tiene que $\mathcal{F}(A)$ es cerrado en $C(X)$. Observemos que $X \in \mathcal{F}(A)$. Para probar la conexidad de $\mathcal{F}(A)$, sean $K, L \in \mathcal{F}(A)$ tales que $K, L \neq X$. Por el Colorario 2.8, existen arcos ordenados α y β de K a X y L a K, respectivamente. Entonces $\alpha \cup \beta$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}(A)$ que contiene a K y L. Por lo que $\mathcal{F}(A)$ es conexo. Así, $\mathcal{F}(A)$ es un subcontinuo de $C(X)$. De manera similar se prueba que $\mathcal{G}(A)$ es conexo en $C(X)$. Por lo que $\mathrm{Cl}_{C(C(X))}(\mathcal{G}(A))$ es un subcontinuo de $C(X)$. ■

Proposición 3.6. *Sea X un continuo. Las funciones F y G estan bien definidas.*

Demostración.

La prueba se sigue del Teorema 3.5. ■

Observemos que $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{F}(A)$. Dado que $\mathcal{F}(A)$ es un cerrado en $C(C(X))$, $G(A) \subset F(A)$ para cada A en 2^X.

Teorema 3.7. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $A \in 2^X$. Entonces $G(A) = F(g(A))$.*

Demostración.

Para probar la primera contención, sean $A \in 2^X$ y $K \in G(A)$. Entonces existe una sucesión $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $K_n \to K$ y $A \subset \text{Int}(K_n) \subset K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que $g(A) \subset K$. Recordemos que

$$\mathcal{G}(A) = \{K \in C(X) : A \subset \text{Int}\,(K)\}.$$

Entonces $K_n \in \mathcal{G}(A)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $g(A) \subset K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.16, $g(A) \subset K$. De donde $K \in F(g(A))$. Por lo que $G(A) \subset F(g(A))$.

Para probar la otra contención, necesitamos demostrar las siguientes afirmaciones.

Afirmación I. $g(A) \subset g(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in \mathcal{G}(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$. Entonces

$$A \subset N(A, \frac{1}{n}) \subset \text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) \subset \text{Int}\,(K)\,.$$

Así $K \in \mathcal{G}(A)$. Por lo que

$$\bigcap \mathcal{G}(A) \subset \bigcap \mathcal{G}(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))).$$

De donde

$$g(A) \subset g(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))).$$

Afirmación II. $g(A) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} g(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$.

Por la Afirmación I, $g(A) \subset g(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$.
Para probar la otra contención, sea $z \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} g(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$. Con el fin de probar que $z \in g(A)$, supongamos que $z \notin g(A)$. Así existe $K \in \mathcal{G}(A)$ tal que $A \subset \text{Int}\,(K)$ y $z \notin K$. Por el Lema 1.13, existe $r > 0$ tal que $N(A, r) \subset \text{Int}\,(K)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < r$. Entonces

$$N(A, \frac{1}{m}) \subset N(A, r) \subset \text{Int}\,(K)\,.$$

Por el Lema 1.16,

$$\text{Cl}(N(A, \frac{1}{2m})) \subset N(A, \frac{1}{m}) \subset N(A, r) \subset \text{Int}\,(K)\,.$$

De donde $K \in \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$. Dado que

$$z \in \bigcap \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))), z \in K,$$

lo cual es una contradición. Por lo que $z \in g(A)$. Esto termina la prueba de la Afirmación II.

Afirmación III. $g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1}))) \subset g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para probar la contención, sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$. Entonces

$$\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1})) \subset \mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) \subset \mathrm{Int}\,(K)\,.$$

Así $K \in \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1})))$. De donde

$$\mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \subset \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1}))).$$

Entonces

$$g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1}))) = \bigcap \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1}))) \subset \bigcap \mathcal{G}(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) = g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))).$$

Por lo que

$$g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n+1}))) \subset g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))).$$

Afirmación IV. $g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \to g(A)$.

Sea $\epsilon > 0$.Usando la Afirmación III y la Proposición 1.14, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N(g(A), \epsilon) \supset g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$$

para toda $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Demostraremos que

$$H(g(A), g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))) < \epsilon.$$

Por el Lema 2.9, es suficiente probar que

$$g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \subset N(g(A), \epsilon) \text{ y}$$

$$g(A) \subset N(\epsilon, g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))).$$

La primera contención se sigue de la elección de N y la segunda contención, se sigue de la Afirmación I.

Regresando a la prueba de que $F(g(A)) \subset G(A)$, sea $K \in F(g(A))$.
Entonces $g(A) \subset K$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado que

$$g(A) \subset g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \text{ y} g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$$

es un continuo, $K \cup g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})))$ es un continuo. De la definición de la función g,

$$g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \supset \mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) \supset N(A, \frac{1}{n}) \supset A.$$

Así $K \cup g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \in G(A)$.
Por otra parte, por el Teorema 2.10 y la Afirmación IV,

$$K \cup g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \to K \cup g(A).$$

De donde

$$K \cup g(\mathrm{Cl}(N(A, \frac{1}{n}))) \to K.$$

Así, como $G(A)$ es un cerrado en $C(X)$, $K \in G(A)$. Esto prueba que $F(g(A)) \subset G(A)$.
Por lo tanto

$$F(g(A)) = G(A).$$

■

Teorema 3.8. *La función F es u.s.c.*

Demostración.

Sean $A \in 2^X$ y $(A_n)_n$ una sucesiones en 2^X tal que $(A_n)_n \to A$. Por el Teorema 2.22, es suficiente demostrar que $\mathrm{Lim\,sup}\, F(A_n) \subset F(A)$. Sea $K \in \mathrm{Lim\,sup}\, F(A_n)$. Usando el Teorema 2.18, existen dos subsucesiones $(A_{n_k})_k$ y $(K_{n_k})_k$ tales que $K_{n_k} \in F(A_{n_k})$ y $(K_{n_k})_k$ converge a K. De la definición de F, tenemos que $(A_{n_k}) \subset (K_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por en Teorema 2.14,

$$A = \mathrm{Lim}\, A_{n_k} \subset \mathrm{Lim}\, K_{n_k} = K.$$

En consecuencia $A \subset K$ y $K \in F(A)$. Por lo tanto $\mathrm{Lim\,sup}\, F(A_n) \subset F(A)$. ■

Teorema 3.9. *La función G es l.s.c.*

Demostración.

Sea $A \in 2^X$ y $(A_n)_n$ una sucesiones en 2^X tal que $(A_n)_n \to A$. Por el Teorema 2.22, es suficiente demostrar que $G(A) \subset \liminf G(A_n)$. Sea $K \in G(A)$. Por definición de G, existe una sucesión de continuos $(K_n)_n$ tal que $K_n \to K$ y $A \subset \operatorname{int}(K_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$A \subset \operatorname{int}(K_n).$$

Así, $A \in \langle \operatorname{int}(K_n) \rangle$. Dado que $(A_n)_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \in \langle \operatorname{int}(K_n) \rangle$ para toda $m \geq N$. De donde, $A_m \subset \operatorname{int}(K_n)$ para toda $m \geq N$. Por definición de la función G, $K_n \in G(A_m)$ para toda $m \geq N$. Por el Lema 2.19, $K_n \in \liminf G(A_m)$. De donde $(K_n)_n \subset \liminf G(A_m)$. Dado que

$$(K_n)_n \to K,$$

por el Teorema 2.13, c),

$$K = \operatorname{Lim} K_n \in \liminf G(A).$$

Esto prueba que

$$G(A) \subset \liminf G(A_n).$$

■

Una prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [3, Lema 2, p. 5].

Lema 3.10. *La función g es u.s.c.*

Teorema 3.11. *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos tal que Y es compacto y $f: X \to Y$ una función suprayectiva. Sea $x_0 \in X$. Entonces f es continua en a si y sólo si para toda $(a_n)_n \subset X$ tal que $\operatorname{Lim} a_n = a$ y para toda subsucesión $(a_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$ tal que la sucesión $(f(a_{n_k}))_k$ es convergente en Y, se cumple que $\operatorname{Lim} f(a_{n_k}) = f(a)$.*

Demostración.

Para demostrar la Suficiencia, supongamos que f no es continua en a. Entonces existe $\epsilon > 0$, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in X$ tal que

$$d(a, y_n) < \frac{1}{n} \text{ y } d(f(x_0), f(y_n)) \geq \epsilon.$$

Claramente la sucesión $(y_n)_n$ converge a a. Dado que Y es compacto, existe una subsucesión $(y_{n_k})_k$ de $(y_n)_n$ tal que la sucesión $(f(y_{n_k}))_k$ es convergente en Y. Por hipótesis, $\operatorname{Lim} f(y_{n_k}) = f(x_0)$. Así, para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_0), f(y_{n_k})) < \epsilon$ para todo $k \geq N$, una contradicción. Por lo que f es continua.

Para probar la Necesidad supongamos que f es continua en x_0. Sea $(a_n)_n \subset X$ tal que $\operatorname{Lim} a_n = a$ y sea $(a_{n_k})_k \subset (a_n)_n$ tal que la sucesión $(f(a_{n_k}))_k$ es convergente en Y. Por la continuidad de f en a, $\operatorname{Lim} f(a_n) = f(a)$. Dado que la sucesión $(f(a_{n_k}))_k$ es una subsucesión de $(f(a_n))_n$ convergente, $\operatorname{Lim} f(a_{n_k}) = f(a)$. ■

Teorema 3.12. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $A \in 2^X$. Entonces la función G es continua en A si y sólo si la función g es continua en A.*

Demostración.

Para demostrar la Suficiencia, supongamos que g es continua en A. Por el Teorema 3.9, G es l.s.c. en A. Ahora demostraremos que G es u.s.c. en A. Sean $A \in 2^X$ y $(A_n)_n$ una sucesiones en 2^X tal que $(A_n)_n \to A$. Por el Teorema 2.22, es suficiente demostrar que $\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A)$. Por la Proposición 3.7,

$$\text{Lim sup } G(A_n) = \text{Lim sup } F(g(A_n)).$$

Usando que F es u.s.c.(3.8),

$$\text{Lim sup } F(g(A_n)) \subset F(g(A)) = G(A).$$

Concluimos que

$$\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A).$$

Así, G es u.s.c. en A. Por el Teorema 2.22, G es continua en A.

Para demostrar la Necesidad, supongamos que G es continua en A. Sea $(A_n)_n$ una sucesión convergente a A. Sea $n \in \mathbb{N}$. De la definición de la función g, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$g(\text{Cl}(N(A_n, \frac{1}{m}))) \supset \text{Cl}(N(A_n, \frac{1}{m})) \supset N(A_n, \frac{1}{m}) \supseteq A_n.$$

De donde $g(\text{Cl}(N(A_n, \frac{1}{m}))) \in \mathcal{G}(A_n)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Usando que

$$g(\text{Cl}(N(A_n, \frac{1}{m}))) \to g(A_n)$$

(Ver Afirmación IV, en la prueba del Teorema 3.7), $g(A_n) \in G(A_n)$. Sea $(g(A_{n_k}))_k$ una sucesión convergente arbitraria de $(g(A_n))_n$. Por el Teorema 2.14 y la continuidad de G,

$$\text{Lim}\, g(A_{n_k}) \in \text{Lim}\, G(A_{n_k}) = G(A).$$

Así usando la Proposición 2.22 y la definición de la función F, $g(A) \subset \text{Lim}\, g(A_{n_k})$. Dado que g es u.s.c. (por Lema 3.10) y por el Teorema 2.22,

$$\text{Lim sup } g(A_{n_k}) = \text{Lim} g(A_{n_k}) \subset g(A).$$

Por lo que

$$\text{Lim}\, g(A_{n_k}) = g(A).$$

Usando el Teorema 3.11, g es continua. ■

Teorema 3.13. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente. Entonces la función $G|_{F_1(X)}$ es continua si y sólo si la función $g|_{F_1(X)}$ es continua.*

Demostración.

Para demostrar la Suficiencia, sea $A = \{x\}$. Supongamos que $g|_{F_1(x)}$ es continua en A. Por el Teorema 3.9, G es l.s.c. en A. Ahora demostraremos que G es u.s.c. en A. Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $F_1(X)$ tal que $(A_n)_n \to A$. Por el Teorema 2.22, es suficiente demostrar que Lim sup $G(A_n) \subset G(A)$. Por la Proposición 3.7,

$$\text{Lim sup } G(A_n) = \text{Lim sup } F(g(A_n)).$$

Usando que F es u.s.c.(3.8),

$$\text{Lim sup } F(g(A_n)) \subset F(g(A)) = G(A).$$

Concluimos que

$$\text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A).$$

Así, G es u.s.c. en A. Por el Teorema 2.22, G es continua en A.

Para demostrar la Necesidad, supongamos que $G|_{F_1(X)}$ es continua en $A = \{x\}$. Sea $(A_n)_n \subset F_1(X)$ una sucesión convergente a A. Sea $n \in \mathbb{N}$. De la definición de la función g, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$g(Cl(N(A_n, \frac{1}{m}))) \supset Cl(N(A_n, \frac{1}{m})) \supset N(A_n, \frac{1}{m}) \supset A_n.$$

De donde $g(Cl(N(A_n, \frac{1}{m}))) \in \mathcal{G}(A_n)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Usando que

$$g(Cl(N(A_n, \frac{1}{m}))) \to g(A_n)$$

(Ver Afirmación IV, en la prueba del Teorema 3.7),

$$g(A_n) \in G(A_n).$$

Sea $(g(A_{n_k}))_k$ una sucesión convergente arbitraria de $(g(A_n))_n$. Por el Teorema 2.14 y la continuidad de $G|_{F_1(x)}$,

$$\text{Lim}\, g\big|_{F_1(x)}(A_{n_k}) \in \text{Lim}\, G\big|_{F_1(x)}(A_{n_k}) = G\big|_{F_1(x)}(A).$$

Así usando la Proposición 3.7 y la definición de la función F,

$$g\big|_{F_1(x)}(A) \subset \text{Lim}\, g\big|_{F_1(x)}(A_{n_k}).$$

Dado que $g|_{F_1(x)}$ es u.s.c. (por Lema 3.10) y por el Teorema 2.22,

$$\text{Lim sup } g\big|_{F_1(x)}(A_{n_k}) = \text{Lim}\, g\big|_{F_1(x)}(A_{n_k}) \subset g\big|_{F_1(x)}(A).$$

Por lo que

$$\text{Lim}\, g\big|_{F_1(x)}(A_{n_k}) = g\big|_{F_1(x)}(A).$$

Usando el Teorema 3.11, $g|_{F_1(x)}$ es continua. ■

Una prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [2, Lema 1, p. 2].

Lema 3.14. *La función f es l.s.c.*

Teorema 3.15. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $A \in 2^X$. Entonces la función F es continua en A si y sólo si la función f es continua en A.*

Demostración.

Para demostrar la Suficiencia, sea $A \in 2^X$ y supongamos que f es continua en A. Por el Teorema 3.8, F es u.s.c. en A. Ahora demostraremos que F es l.s.c. en A. Sea $(A_n)_n$ una sucesión en 2^X tal que $(A_n)_n \to A$. Por el Teorema 2.22, es suficiente demostrar que $F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n)$. Sea $K \in F(A)$. Entonces $A \subset K \in C(X)$. Por definición de la función f, $f(A) \subset K$. Hagamos $B_n = A_n \cup A$ para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $B_n \to A$. Por la continuidad de f, $f(B_n) \to f(A)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de la función f, $B_n \subset f(B_n)$. Dado que

$$A \subset K \cap f(B_n), K \cup f(B_n)$$

es un continuo tal que contiene A_n. Así, $K \cup f(B_n) \in F(A_n)$. Por Teorema 2.18 y dado que $K \in f(A)$,$K \cup f(B_n) \to K$ entonces $K \in \text{Lim inf } F(A_n)$ con esto concluimos

$$F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n).$$

Para demostrar la Necesidad, supongamos que F es continua en A. De acuerdo a la definición 2.20, probaremos que f es l.s.c. y u.s.c. Por el Lema 3.14, la función f es l.s.c. Para probar que f es u.s.c., por la Proposición 2.22, es suficiente mostrar que $\text{Lim sup } f(A_n) \subset f(A)$ para cada sucesión $(A_n)_n$ en 2^X convergente a A. Sea $(A_n)_n$ una sucesión en 2^X convergente a A. Por la continuidad de F,

$$F(A) = \text{Lim}\, F(A_n).$$

Dado que $A \subset f(A)$ (por definición de f), por el Colorario 3.2 y la definición de F, $f(A) \in F(A)$. Usando el Teorema 2.18 y que $f(A) \in F(A) = \text{Lim}\, F(A_n)$, existe $K_n \in F(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{Lim}\, K_n = f(A).$$

De que cada $A_n \subset K_n$, por la definición de f, cada $f(A_n) \subset K_n$. Sea $z \in \text{Lim sup } f(A_n)$. Por el Teorema 2.18, existe un $z_{n_k} \in f(A_{n_k})$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $(z_{n_k})_k$ convergente a z. Dado que cada $z_{n_k} \in f(A_{n_k}) \subset K_{n_k}$, por el Teorema 2.18, $z \in \text{Lim } K_n = f(A)$. Concluimos que $\text{Lim sup } f(A_n) \subset f(A)$. ■

Lema 3.16. *Sea X un continuo. Sean $A \in 2^X$ tal que $F(A) = G(A)$ y $(A_n)_n$ una sucesión convergente a A. Entonces*

$$F(A) = G(A) = \mathit{Lim\ sup}\ F(A_n) = \mathit{Lim\ inf}\ F(A_n) = \mathit{Lim\ inf}\ G(A_n).$$

Demostración.

Supongamos que $F(A) = G(A)$. Por el Teorema 3.8,

$$\text{Lim sup } F(A_n) \subset F(A) = G(A).$$

Por el Teorema 3.9,

$$F(A) = G(A) \subset \text{Lim inf } G(A_n).$$

Por definición de las funciones F y G, $G(A_n) \subset F(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, Lim inf $G(A_n) \subset$ Lim inf $F(A_n)$. Por el Teorema 2.13,

$$\text{Lim inf } F(A_n) \subset \text{Lim sup } F(A_n).$$

Por lo que

$$\text{Lim sup } F(A_n) \subset F(A) = G(A) \subset \text{Lim inf } G(A_n) \subset \text{Lim inf } F(A_n) \subset \text{Lim sup } F(A_n).$$

Por lo tanto

$$F(A) = G(A) = \text{Lim sup } F(A_n) = \text{Lim inf } F(A_n) = \text{Lim inf } G(A_n).$$

■

Teorema 3.17. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces F es continua en A si y sólo si $F(A) = G(A)$.*

Demostración.

Para demostrar la Necesidad, supongamos que F es continua en A. Primero probaremos que $F(A) \subset G(A)$. Sean $K \in F(A)$ y la sucesión $(Cl(N(A, \frac{1}{n}))_n$. Por la continuidad de F y por Lema 2.11,

$$F(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) \to F(A).$$

Dado que

$$K \in \text{Lim inf } F(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) = \text{Lim}_n F(\text{Cl}(N(A, \frac{1}{n})) = F(A),$$

por el Teorema 2.18, existe $K_n \in F(Cl(N(A, \frac{1}{n}))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \to K$. Observe que

$$A \subset N(A, \frac{1}{n}) \subset \text{Cl}(N(A, \frac{1}{n}) \subset K_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subset \text{int}(K_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así

$$(K_n)_n \subset \{K \in C(X) : A \subset \text{int}(K)\} = \mathcal{G}(A).$$

De donde $K \in G(A)$. Esto prueba que $F(A) \subset G(A)$. Para demostrar la otra contención, sean $K \in G(A)$ y $(K_n)_n \subset \mathcal{G}(A)$ tal que $K_n \to K$. Dado que $A \subset K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $K_n \to K$, por Teorema 2.16, $A \subset K$. De donde $K \in F(A)$. Así, $G(A) \subset F(A)$. Esto prueba $F(A) = G(A)$.

Para demostrar la Suficiencia, supongamos que $F(A) = G(A)$. De acuerdo a la definición 2.20, probaremos que F es l.s.c. y u.s.c. en A. Por el Teorema 3.8, la función F es u.s.c. Para probar que F es l.s.c., sea $(A_n)_n$ una sucesión convergente a A. De acuerdo a la Proposición 2.22, probaremos que $F(A) \subset \text{Lim inf } F(A_n)$. Ésta contención se sigue del Lema 3.16. Concluimos que F es u.s.c., l.s.c. y es continua en A. ■

Corolario 3.18. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Si F es continua en A, entonces G es continua en A.*

Demostración.

Por la Proposición 3.9, G es l.s.c. Vamos a demostrar que G es u.s.c. Dado que $G(A_n) \subset F(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Lim inf } G(A_n) \subset \text{Lim inf } F(A_n).$$

Por el Teorema 2.13,

$$\text{Lim inf } F(A_n) \subset \text{Lim sup } F(A_n).$$

Usando que F es continua en A, por el Teorema 3.17,

$$\text{Lim sup } F(A_n) = \operatorname{Lim} F(A_n) = F(A) = G(A).$$

Por lo que

$$\text{Lim inf } G(A_n) \subset G(A).$$

Así, G es u.s.c. Por lo tanto G es continua en A. ■

Teorema 3.19. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Si $G|_{F_1(X)} : F_1(X) \to C^2(X)$ es continua en cada $\{x\}$ para cada $x \in A$, entonces G es continua en A.*

Demostración.

Supongamos la restricción

$$G\big|_{F_1(X)} : F_1(X) \to C^2(X)$$

es continua en cada sigleton $\{x\} \in F_1(X)$ para cada $x \in A$. Por el Teorema 3.9, G es l.s.c. Vamos a demostrar que G es u.s.c. Sea $(A_n)_n$ una sucesión convergente a A. Por el Teorema 2.16, es suficiente demostrar que Lim sup $G(A_n) \subset G(A)$. Consideremos $K \in$ Lim sup $G(A_n)$ y $\epsilon > 0$. Vamos a probar que existe $L \in \mathcal{G}(A)$ tal que $H(K, L) < \epsilon$. Por el Teorema 2.18, existe una sucesión $(K_{n_k})_k$ tal que

$$K = \operatorname{Lim} K_{n_k} \text{ y} K_{n_k} \in G(A_{n_k})$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $K = \operatorname{Lim} K_n$ y $K_n \in G(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por cada $n \in \mathbb{N}$, por la definición de la función G existe una sucesión $(R_{n,m})_m \subset \mathcal{G}(A_n)$ tal que $\operatorname{Lim} R_{n,m} = K_n$. Entonces existe una sucesión $(R_{n_k,m_k})_k$ tal que $R_{n_k,m_k} \to K$. Dado que $A_{n_k} \subset \operatorname{Int}(R_{n_k,m_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Lim} A_{n_k} = A, \operatorname{Lim} R_{n_k,m_k} = K,$$

por el Teorema 2.14, $A \subset K$. Sea $x \in A$. Dado que $\operatorname{Lim} A_{n_k} = \liminf A_{n_k} = A$, por el Teorema 2.18, existe una sucesión de $(x_{n_k})_k$ convergente a x tal que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$x_{n_k} \in A_{n_k} \subset \operatorname{Int}(R_{n_k,m_k})$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De donde $R_{n_k,m_k} \in G(\{x_{n_k}\})$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Dado que $R_{n_k,m_k} \to K$, por el Teorema 2.18,

$$K \in \text{Lim sup } G(\{x_{n_k}\}).$$

Por la continuidad de G en $\{x\}$,

$$K \in \text{Lim sup } G(\{x_{n_k}\}) = \text{Lim}\, G(\{x_{n_k}\}) = G(\{x\}).$$

Así $K \in G(\{x\})$. Por la definición de G, existe $K(x) \in \mathcal{G}(\{x\})$ tal que $H(K, K(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Hagamos

$$L = K \cup \text{Cl}\,(\bigcup\{K(x) : x \in A\}).$$

Dado que $A \subset K$ y $x \in K(x)$ para cada $x \in A$, L es un continuo. Usando que $x \in \text{Int}(K(x))$ para cada $x \in A$,

$$A \subset \bigcup\{\text{Int}\,(K(x)) : x \in A\} \subset L.$$

Así $A \subset \text{Int}\,(L)$ y $L \in \mathcal{G}(A)$. Finalmente probaremos $K \subseteq N(L, \epsilon)$ y $L \subseteq N(K, \epsilon)$. Dado que $K \subset L$, $K \subseteq N(L, \epsilon)$. Para probar la otra contención, sea $a \in L$. Por la definición de L, solo consideramos el caso $a \in \text{Cl}\,(\bigcup\{K(x) : x \in A\})$. Entonces existen $x \in A$ y $y \in K(x)$ tales que $d(a, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, usando que $H(K, K(x)) < \frac{\epsilon}{2}$, existe $b \in K$ tal que $d(b, y) < \frac{\epsilon}{2}$. De donde

$$d(a, b) \leq d(a, y) + d(y, b) < \epsilon.$$

Así $L \subset N(K, \epsilon)$. Esto prueba $H(K, L) < \epsilon$. Por lo que

$$K \in G(A) \text{ y } \text{Lim sup } G(A_n) \subset G(A).$$

Por lo tanto G es continua en A.

■

Corolario 3.20. *La función G es continua si y sólo si la reestrición $G|_{F_1(x)} : F_1(X) \to C^2(X)$ es continua.*

Demostración.

Solo probaremos la Suficiencia, ya que la Necesidad se sigue de la continuidad de G. Sea $A \in 2^X$. Dado que $G|_{F_1(X)} : F_1(X) \to C^2(X)$ es continua, ésta es continua en cada $\{x\}$ para cada $x \in A$. Por el Teorema 3.19, G es continua en A. Por lo tanto G es continua. ■

Corolario 3.21. *Para un continuo hereditariamente unicoherente X. La continuidad de la función g es equivalente a la continuidad de la restrición $g|_{F_1(X)}$.*

Demostración.

Para la Necesidad supongamos que g es continua. Por Teorema 3.12, G es continua. Del Corolario 3.20, $G|_{F_1(X)}$ es continua. Por el Teorema 3.13, $g|_{F_1(x)}$ es continua.
Para la Suficiencia, supongamos que $g|_{F_1(x)}$ es continua. Usando el Teorema 3.13, $G|_{F_1(X)}$ es continua. Del Corolario 3.20, G es continua. Por el Teorema 3.12, g es continua. ■

3.1. Suavidad y la función F

Definición 3.22. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es suave en p si para cada punto $x \in X$, para cada sucesión de puntos $(x_n)_n \subset X$ que convergen a x y para cada $K \in C(X)$ tal que $p, x \in K$, existe una sucesión $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $K = \operatorname{Lim} K_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $p, x_n \in K_n$.*

Proposición 3.23. *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es suave en p si y sólo si la función restrición $F|_{F_2(p,X)} : F_2(p, X) \to C(C(X))$ es continua.*

Demostración.

Para probar la Necesidad, sean $A \in F_2(p, X)$ y una sucesión $(A_n)_n \subset F_2(p, X)$ tales que $A_n \to A$. Sea $h = F|_{F_2(p,X)}$. Primero vamos a probar que h es u.s.c. Por Proposición 2.22, demostraremos que Lim sup $h(A_n) \subset h(A_n)$. Usando que F es u.s.c. y dado que $A \in 2^X$, $(A_n)_n \subset 2^X$ y $(A_n)_n$ converge a A en X,

$$\text{Lim sup } F(A_n) \subset F(A_n).$$

Por lo que Lim sup $h(A_n) \subset h(A_n)$. Esto prueba que h es u.s.c. Finalmente veamos que h es l.s.c. Sean $A = \{(p, a)\} \in F_2(p, X)$ y una sucesión $(A_n)_n \subset F_2(p, X)$ tales que $A_n \to A$. Queremos demostrar que $h(A) \subset \liminf h(A_n)$. Sea $K \in h(A)$. Entonces $A \subset K \in C(X)$. Dado $A_n \to A$, por la Proposición 2.18, existe $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to a$ y $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X es suave en p, existe $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $p, x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $K_n \to K$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos $K_n \in h(A_n)$. Consideremos los siguientes casos.

Caso I. Supongamos que $p \neq a$.

Podemos suponer que $x_n \neq p$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $A_n = \{x_n, p\} \subset K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $K_n \in h(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Caso II. Supongamos $p = a$.

Consideremos los siguientes dos subcasos.

Subcaso I. Supongamos que $x_n = p$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Entonces $A_n = \{p\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $A_n = \{p\} \subseteq K_n \in h(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Subcaso II. Supongamos que $x_{n_k} \neq p$ para toda $k \in \mathbb{N}$.
De donde $A_{n_k} = \{p, x_{n_k}\} \subset K_{n_k} \in h(A_{n_k})$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $z \in (x_n)_n \setminus (x_{n_k})_k$, se tiene $z = p$. Por lo que $A_n \subset K_n \in h(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

De los casos anteriores y dado que $K_n \to K$, concluimos $K \in \liminf h(A_n)$. Por lo que

$$h(A) \subset \text{Lim inf } h(A_n).$$

Esto prueba que h es l.s.c. y h es continua.

Para probar la Suficiencia, sean $x \in X$, $K \in C(X)$ tal que $x, p \in K$ y $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x$. Por cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{x_n, p\}$. Dado que $A_n \to \{x, p\} \in F_2(p, X)$, por la continuidad de h,

$$h(A_n) \to h(\{x, p\}).$$

Usando que $K \in h(\{x, p\})$, Por la Proposición 2.18, existe una sucesión $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $A_n \subset K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\text{Lim}\, K_n = K$. Concluimos que X es suave. ■

Proposición 3.24. *Si un continuo X es suave en p, entonces para cada $A \in 2^X_p$ la función F es continua en A.*

Demostración.

Sea $A \in 2^X_p$. Por Teorema 3.8, F es u.s.c. en A. Vamos a demostrar que F es l.s.c. Sea $\epsilon > 0$. Por el Teorema 3.23, $F|_{F_2(p,X)}$ es uniformemente continua. Así, existe $\delta > 0$ tal que si

$$P, Q \in F_2(p, X) \text{ y} H(P, Q) < \delta,$$

entonces $H^2(F(P), F(Q)) < \epsilon$. Sean $B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \delta$ y $K \in F(A)$. Vamos a demostrar que existe $L \in F(B)$ tal que $H(K, L) < \epsilon$. Por el Lema 2.9, $B \subset N(\delta, A)$. Sea $x \in B$. Entonces existe $y_x \in A$ tal que $d(x, y_x) < \delta$. Entonces

$$\{p, x\}, \{p, y_x\} \in F_2(p, X) \text{ y} H(\{p, x\}, \{p, y_x\}) < \delta,$$

por la continuidad uniforme de $F|_{F_2(p,X)}$,

$$H^2(F(\{p,x\}), F(\{p,y_x\})) < \epsilon.$$

Por el Lema 2.9,

$$F(\{p,y_x\}) \subset N^2(\epsilon, F(\{p,x\})).$$

De donde $\{p,y_x\} \subset A \subset K$. Por lo que $K \in F(\{p,y_x\})$. Así, existe $L_x \in F(\{p,x\})$ tal que $H(K,L_x) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $L = \mathrm{Cl}(\cup : \{L_x : x \in B\})$. Notemos que $x \in L_x \cap B$ para todo $x \in B$, $L \in C(X)$ y $B \subseteq L$. Así $L \in F(B)$. Finalmente probaremos que $H(K,L) < \epsilon$. Primero veamos que $L \subset N(\epsilon,K)$. Dado que $H(K,L_x) < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $x \in B$, por el Lema 2.9, $L_x \subset N(\epsilon,K)$ para todo $x \in B$. Por lo que

$$L = \mathrm{Cl}(\bigcup_{x\in B} L_x) \subset \mathrm{Cl}(N(\frac{\epsilon}{2},K)) \subset N(\epsilon,K).$$

Ahora, probaremos que $K \subset N(\epsilon,L)$. Dado que $H(K,L_x) < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $x \in B$, por el Lema 2.9, $K \subset N(\epsilon,L_x)$ para toda $x \in B$. De donde $K \subseteq N(\epsilon,L)$. Nuevamente, por el Lema 2.9, $H(K,L) < \epsilon$. Esto prueba que F es l.s.c. en A. Por lo tanto F es continua en A. ■

Proposición 3.25. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si F es continua en cada elemento de $C(p,X)$, entonces X es suave en p.*

Demostración.

Sean $x \in X$, $(x_n)_n$ una sucesión convergente a x y $K \in C(p,X)$ tal que $x \in K$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = K \cup \{x_n\}$. Vamos a probar que $A_n \to K$. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $x_n \to x$, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Claramente $K \subset N(\epsilon,A_n)$. Ahora, sea $y \in A_n$. Si $y \in K$, entonces $y \in N(\epsilon,K)$. En el caso de que $y = x_n$, usamos que $d(x_n,x) < \epsilon$ y $x \in K$, para obtener que $y \in N(\epsilon,K)$, así $A_n \subset N(\epsilon,K)$. Usando el Lema 2.9, $H(K,A_n) < \epsilon$. Esto prueba la convergencia de la sucesión $(A_n)_n$ al continuo K. De la continuidad de F en K, $F(A_n) \to F(K)$. Como

$$K \in F(K) = \mathrm{Lim\ inf}\, F(A_n),$$

por la Proposición 2.18, existe $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que

$$\mathrm{Lim}\, K_n = K \ \text{ y } x_n, p \in A_n \subset K_n \in F(A_n)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que X es suave en p.

■

Tomando en Conjunto los resultados de las Proposiciones (3.23,3.24,3.25),obtenemos

Teorema 3.26. *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) X *es suave en* p.

ii) F *es continua en* A *para cada* $A \in 2^X_p$.

iii) F *es continua en* K *para cada* $K \in C(p, X)$.

iv) $F|_{F_2(p,X)}$ *es continua.*

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$. Se sigue de la Proposición 3.24.
$i) \Leftrightarrow iv)$. Se sigue de la Proposición 3.23.
$iii) \Rightarrow i)$. Se sigue de la Proposición 3.25.
$ii) \Rightarrow iii)$. Usando la continuidad de F en cada elemento de 2^X_p y que $C(p, X) \subset 2^X_p$, para obtener que F es continua en cada elemento de $C(p, X)$. ■

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [6, Corolario (3.3), p. 84].

Teorema 3.27. *Sea X un continuo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si X es suave en cada uno de sus puntos.*

Corolario 3.28. *Sea X un continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) X *es localmente conexo.*

ii) F *es continua.*

iii) $F|_{F_n(X)}$ *es continua, para* $n \geq 2$.

iv) $F|_{F_2(X)}$ *es continua.*

Demostración.

i) $\Rightarrow$ *ii*). Se sigue del Teorema 3.26 *i*), y del Teorema 3.27.

ii) $\Rightarrow$ *iii*). Se sigue de que las funciones restrición de funciones continuas son continuas y de que $F_n(X) \subset 2^X$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) $\Rightarrow$ *iv*). Se sigue de que la función restrición $F|_{F_n(X)}$ es continua, para $n \geq 2$ y de que $F_2(X) \subset F_n(X)$.

iv) $\Rightarrow$ *i*). Se sigue de que la función restrición $F|_{F_2(p,X)}$ es continua para cada $p \in X$, del Teorema 3.27 y del Teorema 3.26 *i*). $\blacksquare$

Bibliografía

[1] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass, 1966.

[2] Goodykoontz, Jr., J.T., *Connectednees im kleinen and local connectedness in* 2^X *and* $C(X)$, Pacific J. Math, 53, (1974), 387-397.

[3] Goondykoontz, Jr., J.T., *Some functions on hyperspaces of hereditarily unicoherent continua*. Fund. Math. 95, (1977), 1-10.

[4] Kelley, J.L., *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52, (1942), 23-36.

[5] Nadler, Jr., S. B., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49. New York, Basel: Marcel Dekker, 1978.

[6] Mackowiak, T., *On smooth continua*. Fund. Math. 85, (1974), 79-95.